東京工芸大学工学部紀要 Vol. 31 No.1（2008）

石取りゲームの教材化

植野　義明*

概要

石取りゲームは数学的に必勝法が解析できる数少ないゲームのひとつで, C. L. Bouton (1902) による Nim の解析以来, 数学者の興味を引いてきた。Nim は三山崩しともいい, その必勝形の記述には, コンピュータの論理設計で使われる集合 $\{0, 1\}$ 上の「排他的論理和」の直和演算が有効に使われるが, これは, 加法群 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の有限個の直和と言っても同じことである。Nim について解説した記事はいくつかあるが, 数学の教科書的なスタイルに沿った物が多い。そのため, 実際にゲームをしてみればすぐに分かることが回りくどく定義されている場合もある。

本稿を著すにあたって, 2008 年 9 月 13 日筆者は実際に都内のある私立の中高一貫校の PTA 主催の行事に参加して, 2 時間のワークショップを実施した。このワークショップには, 中学 1 年生から高校 2 年生までの生徒 8 名と, 保護者 21 名の, 合計 29 名が受講生として参加した。本稿では, その経験から, 中学校, 高等学校における数学的活動におけるひとつの題材として Nim を取り上げる場合の指導上の留意点について述べる。

1　数学的活動

学習指導要領解説によると, 高校数学では，生涯にわたり数学を幅広く活用するためにはどんな能力や態度が必要であるかとの観点から，「数学的活動」「数学的な見方や考え方」を通して, 事象や現象を数学の対象としてとらえる視点と，問題解決能力や考える力の育成を重視している。数学的活動については，観察，操作，実験・実習などの外的な活動と，直観，類推，帰納，演繹などの内的な活動が考えられる。

さらに具体的には，次のような思考活動を数学的活動ととらえている。

1. 身近な事象を取り上げそれを数学化し，数学的な課題を設定する活動
2. 設定した数学的な課題を既習事項や公理・定義等を基にして数学的に考察・処理し，その過程で見いだしたいろいろな数学的性質を論理的に系統化し，数学の新しい理論・定理等（「数学的知識」）を構成する活動
3. 数学的知識を構成するに至るまでの思考過程を振り返ったり，構成した数学的知識の意味を考察の対象となった当初の身近な事象に戻って考えたり，他の具体的な事象の考察などに数学的知識を活用したりする活動

以上を要約すると, 数学的活動とは, 身近な事象から数学を構築していくプロセスで必要となるいろいろな活動ということができるであろう。

数学的活動では, 初めから系統的・体系的に秩序付けられた数学が与えられるのではなく, 身近な事象や解決・解析しなければならない具体的な問題という形で課題を発見し, それを数学化する。さらに, そうしてできた数学が現実問題にどの程度有効であるかを評価することも含まれる。

数学的活動では, 生徒が自らの日常や関心のある社会現象・自然の中から数学的構造を発見するのが理想だが, 実際に生徒がひとりで発見させるように促すことには難しい側面もある。そこで, 現実には, 教師がいくつかのテーマを与えて, その中から生徒が自ら興味を惹かれるテーマを選ぶことによって,「数学的構造を発見している自分」を疑似体験する

* Associate professor, General Education and Research Center, Tokyo Polytechnic University
Received Sept.22, 2008

ことになるだろう。本稿では, そのようなテーマのひとつとして, 石取りゲームのひとつである Nim を取り上げることにする。また, 以下の論考はゲームを体験しながらそこに存在している数学的概念に気づき, 定式化や論証の世界に入っていく入り口の指導に重点を当てているので, 数学的に「整った」記述にはなっていないことを予めお断りしておく。むしろ, 教師は数学的な定式化や数学的な論証がどのようなものであるかを熟知している必要はあるものの, 石取りゲームという数学的活動で取り上げるひとつの個別のテーマについて, 数学的に解析し尽くされた「結論」のようなものや, 細部の証明技法のようなものには心理的に捉われていないことが望ましい。

2　一山崩し

本稿では三山崩しの必勝法を考えるが, 初めに簡単な場合である一山崩し, 次に, 二山崩しの必勝法を考える。それらは簡単に解析できるが, そこからは三山崩しを攻略する際の重要な概念が得られる。なお, 三山崩しの構造が分かれば, あとは山の個数がいくら増えても原理は同じである。

2.1　導入ではまずルールから考える

小石の山を作っておき, 2 人のプレイヤーが交互にいくつかの石を取っていく石取りゲームは, 小石さえあればどこでも遊べるので, 子どもの遊びとして世界中のどこでも古くから自然発生的に存在していたであろう。そして, 遊びながら, プレイヤーがすぐに必勝法が分かってしまうと感じた場合について, 少しずつルールを複雑化していくというプロセスが進行しただろう。そのようなことは, 子どもの鬼ごっこや「達磨さんが転んだ」「缶蹴り」などいろいろな遊びを観察して分かることである。子どもは遊びながら, ルールを変えるための話し合いを常に行っている。このように, 子どもには自主的にルールを変えていく能力があるということは客観的な事実であり, そのことを教師は知って, 教育に利用していくようにすることが望ましい。そこで, 石取りゲームの教材化では, まず, どのようなルールで遊んだら楽しいかという考察から導入するのがよい。

2.2　順型と逆型

石取りゲームのルールには, 大きく分けて, 最後の石を取った (場を空集合にした) 方を勝ちとするルール (順型) と, 最後の石を取った方を負けとするルール (逆型) とがある。ゲームにもよるが, 一般的に, 順型の勝ち方 (必勝法) が分かれば, 逆型における勝ち方も, それに「ひとひねり」するだけで分かってしまうことが多い。これは, 個々の具体的なゲームについては少しプレーしてみれば簡単に分ることである。そのようなわけで, 教室でも, まず順型での必勝法の研究を先に行うことにするのがよいだろう。

2.3　一山崩しは自明である

Nim は日本語で三山崩しとも言われることから分かるように, 初期状態で小石をいくつかの山に分けておく。山に分けても, 石を取るときに, 「どの山から何個取ってもよい」とすると, これは山が 1 つしかないのと変わらないことになってしまう。そこで, Nim では,

「1 回の手順では, 1 つの山からしか取れない」

ことにする。また, 本稿では扱わないが, もう少し複雑な Whytoff のゲームでは,

「2 つの山から取るときは, それぞれの山から必ず同数の石を取る」

という制限を設ける。これらは, ゲームを複雑化する工夫である。

数学では, 特殊な場合や簡単な場合をまず考察し, そこで得られた知見をもとにして, 一般の場合や複雑な場合を考察するとうまくいくことが多い。例えば, 幾何学や線形代数学では, 次元の低い場合にいろいろな例を作って考察し, その後, 一般の次元でも成り立つ定理へと仕上げていく。

そこで, まずつまらない例ではあるが, 山が 1 つしかない場合を考えると, その場合は, 順型ならば先手がすべての石を取ってしまえば先手の勝ちとなるし, 逆型ならば, 先手が 1 つの石だけを除いてすべての石を取ってしまえば先手の勝ちとなる。最初

から石が 1 つしかない場合は, 先手の負けとなる。このように, 一山崩しは初期条件 (最初の石の個数) と誰が先手であるかだけが分かれば直ちに勝ち負けの結果が分かってしまうという意味で自明なゲームとなる。また, 逆型の場合石が 1 つしかなければ先手の負け。石が 2 つ以上あれば, 先手の勝ちとなる。

2.4 制限付き一山崩し

これではゲームとして面白味に欠けるので, 一般的にゲームあるいはパズルとして出題される「一山崩し」では, 1 手で取れる小石の個数に制限を設けている。例えば, 付加的ルールとして

「1 手で取れる石の個数は 1, 2, 3 のどれかである」

という制限を課すことがある。こうして取れる石の個数に上限を設けた一山崩しを制限付き一山崩しということにする。

少しゲームを実行してみると分かるが, 制限付き一山崩しもほぼ自明である。たとえば, 上記の「1 手で取れる石の個数は 1, 2, 3 のどれかである」という一山崩しをプレイしてみると, 石の個数が 4 の倍数であるようにして相手に渡せば勝てることがすぐに分かる。従って, この場合は,「残っている石の個数が 4 の倍数である」ような状態を「負け型」と呼ぶことにすると分かりやすい。負け型とは, 「その形を作って相手に渡せば, 渡された相手が負けてしまう」という意味での命名である [4]。

制限付き一山崩しの石の個数を a とすると, a を 4 で割った余りは $\{0, 1, 2, 3\}$ の要素のどれかである。もしこれが 0 ならば負け型である。もし, これが 0 以外であれば, 1 手で負け型に直すことができる。よって, この場合は, 負け型以外の盤面はすべて勝ち型であると言える。この, 「a を 4 で割った余り」のようなゲームの勝敗を決する量をそのゲームの**不変量**という。一山崩しの場合は, 不変量が簡単に分かることから, 必勝法が容易に分かることになる。

3 二山崩し

次に, 二山崩しについて考える。以下では, 1 手で取れる石の個数には制限を設けない。

これも, 実際の授業での導入部では講師はあまり数学的な解説をせず, ゲームを体験する時間を十分に取ったほうがよい。二つの山の石の個数を a, b とし, その状態を順序対 (a, b) で表わす。対称性から, (a, b) と (b, a) は本質的に同じであることに注意しておく。すなわち, 一方が必勝形ならば他方もそうである。

まず, $(0, 0)$ は負け型である。「最後の石を取った方が勝ち」ということは, $(0, 0)$ の状態を作って相手に渡せば, 渡された相手が負けるということと同じだからである。

しばらくゲームをプレイしていると, 必ず勝てる者が出てくる。その必勝法は「真似っこ作戦」とでも名付けることができる方法である。その方略とは, 常に, 2 つの山の石の個数が等しくなるようにして相手に渡せば勝てるというものである。

いま, 盤面 (a, b) において, $a \neq b$ であるとすると, 先手は a と b のうちの大きいほうからいくつか取って, 2 つの山の石の個数が等しくなるようにして相手に渡す。相手は石を取らざるを得ないから, 再び $a \neq b$ の状態になって自分に手順が回ってくる。このことを繰り返せば, 全体の石の個数 $a + b$ は単調に減少するから, いつかは $(0, 0)$ にすることができ, 勝つのである。

この場合の「不変量」は何だろうか。明らかに $a - b$ である。

ここまでは, 講師は何も説明せず, ただ, ルールを考えながら, プレイさせるだけである。実際の授業時間にして 10 分もあれば十分だろう。簡単なゲームなので, 「負け型」や「不変量」などの用語の解説もしない。ただ, どうすれば勝てるかを考える姿勢を体に覚えこませるだけである。

次に, いよいよ, 三山崩しに移る。

4 三山崩し

さて, 二山崩しまでは簡単に分かったが, 山が三つになると急に難しくなる。それぞれの山の石の個数を a, b, c とすると, 盤面は (a, b, c) という三つの整数の組となり, もし幾何学的に図示すると空間

図１　二山崩しの構造の幾何学的解釈。盤面 (a, b) を平面上の点で表わすと, 状態 (0, 0) に到達した方が勝ち。打てる手は, 平面の第 1 象限 (境界を含む) の格子点から格子点へ下または左に進むことに対応する。直線 $y = x$ の上にない点は 1 手で直線上に移れる。また, 直線上の点から出発すると, 必ず直線から外に出てしまう。

の (第 1 象限の) 点となる。

4.1　必勝手順

全く自由にプレイさせると, 何も得られない可能性がある。石の個数を少なめにし, 必勝法があるかどうか考えさせるのだが, a, b, c と三つも自由度があると, なかなか考えにくい。そこで, 次のような誘導問題を与えることにする [4]

問題 1　以下に示す局面には, 先手に必勝手順があります。その必勝手順を考えてください。

(4, 1, 0)

このような問題をいくつか示し, 2 人ずつ組になって, 実際に碁石などを使いながら考えさせる。必勝手順といっても, 相手の手の打ち方も関係してくるので, 石の数が大きくなると, 場合わけが多くなって解析し尽せない。

上の問題 1 では, 1 つの山の石の個数が 0 個なので, 本質的に二山崩しの問題となっている。そこで, 先手は 4 個の山から石を取って 1 個にすれば, (1, 1, 0) となって, 真似っこ作戦に持ち込める。

ここで, 一般に $(k, k, 0)$ の形の局面は負け型であることが分かる。このようなタイプの負け型を「$(k, k, 0)$ 型の負け型」と呼ぶことにする [4]。

次の問題はどうだろうか。

問題 2　同上。

(4, 3, 4)

これは, $(k, k, 0)$ 型ではないが, 真ん中の山の石を全部取れば $(k, k, 0)$ 型になる。よって, 一般に盤面 (a, b, c) において, 0 個の山がなく, 同数の石の山が 2 つあれば先手に必勝手順があることが分かる。

次の問題は, そのような既存の法則には当て嵌まらないが, どうだろうか。

問題 3　同上。

(7, 2, 1)

これを (3, 2, 1) に直して相手に渡すと, その後, 相手がどんな手を打ってきても自分が勝てることがすべての場合を検討することによって分かる。すなわち, (3, 2, 1) は負け型である。

このようにして, 簡単な問題を碁石を使って解きながら, 負け型のレパートリーを増やしていくと, だんだんと碁石の個数が多くなったときについても, 負け型の判定が早く行えるようになる。それには, 負け型のリストをだんだんと増やしていくことが必要である。たとえば, (4, 5, 1) も負け型である。[*1]

石の総数が問題のサイズを測る自然な測度となる。問題が与えられたならば, 知られているそれよりも小さいサイズの負け型に直せないかどうかを調べてみればよい。

負け型のレパートリーを順々に増やしていく作業は, エラトステネスの篩法で素数のリストを順々に増やしていく体験に似ている。

このような問題をいくつか解いていくと, 必勝法がある場合, 勝つために打てる手は一通りしかないことが体得されてくる。実際, 上の問題に対して解答に示した手以外は, すべて相手側に勝たれてしまうのである。

このことは, 一般に, 数学における解の一意性の問題ととらえることができる。しかし, 一意性の議論に言及するのは, もう少し後でもよい。この段階では, 実際にゲームをプレイしながら体験的に理解することを主とし, 論証的なアプローチはその必要性が感じられてからの方が自然に受け入れられる。

4.2　負け型でなければ勝ち型か

負け型について, もう少し考えてみよう。

もし, 自分の手順になったときに与えられた盤面

[*1] 一般に, $n \geq 1$ のとき, $(2^n, 2^n + 1, 1)$ は負け型であると言える。

が負け型なら自分の負けが確定する。では, 与えられた盤面が負け型でないとしたら, どうだろうか。もし, そこから自分の手番で負け型に直せるとすれば, それは必勝手順があることになるから, 与えられた盤面は負け型ではない。

もし, 与えられた盤面が《負け型ではなく, かつ, どのような手を打っても負け型に直せない》としたらどうだろうか。

直観的には, そのようなことはあり得ないのではないかと思われる。常識的に考えると, 《負け型でないものは勝ち型である》と言えるのではないだろうか。もし, どのような手を打っても負け型に直せない盤面があったとする (仮定 1) と, 自分は負け型ではない状態を作って相手に渡すことになる。相手は, 負け型でない状態を受け取るので勝てる[*2]。すると, 相手に勝たれるので, 自分は負ける。よって, 《どのような手を打っても負け型に直せない盤面は負け型である》は正しい。したがって, 対偶を取ると, 《負け型でなければ, うまい手を打てば負け型に直せる》と言える。うまく手を打てば負け型に直せる盤面はもちろん勝ち型である。よって, 《負け型でなければ, 勝ち型である》ことがこれで証明された。

しかし, この証明では, 相手に渡した盤面に対して《負け型でなければ, 勝ち型である》というまさにそのことを使っているので, 循環論法である。

上記の議論は循環論法であるが, 少し数学を知っていれば, この循環論法から抜け出す方法はある。キーワードは数学的帰納法である。相手に渡す盤面は, 自分に与えられた盤面に比べて石の総数においてより小さくなっている。そこで, 3 つの山の石の総数に関する数学的帰納法を用いれば, 石の総数が最小の場合である (0, 0, 0) に帰着される。(0, 0, 0) はルールによって負け型であり, かつこれから打てる手は存在しないから, 《どのような手を打っても負け型に直せない》は真である。よって, この盤面に対しては命題《どのような手を打っても負け型に直せない盤面は負け型である》は真である[*3]。

こうして,「負け型でないものは勝ち型である」という, まるでコインの表側の反対側は裏側であると主張するのと同様に, 言葉の定義から自明であるように響く命題が正しいことが数学的に証明された。このような数学的証明は本当に必要なのだろうか。

この例では, 数学的証明は必要でもあるし, また有用でもあると筆者は考える。その理由は, 上記の「証明」では数学的帰納法という方法を用いているだけでなく, 石の総数という概念をも用いていることに, 証明をしてみて初めて事後的に気づくからである。もし, 石の総数という概念が使用禁止になったとすれば, 上記の証明を完結することはできなかった。

すなわち, 上記の「数学的証明」を反省すると, この証明はゲームが有限の手順の後に勝敗がつくという性質を本質的に使っていることに気づく。石取りゲームでは, 石の個数が狭義単調に減少することから, 具体的に勝負がつくまでの手順の数の上限が決まるが, より抽象的に, どんな盤面からも有限の手順の後に勝敗が決まるという条件を満たすことだけが情報として与えられている抽象的なゲーム (具体的なルールや用具が与えられていない, 頭の中だけで考えたゲーム) についても, 上記の証明を生かすことができる。これは, 有限型ゲームの基本定理などと呼ばれることのある定理である。また, 将棋などのように, 取った駒を再び打てるようなゲームでは, 千日手と言って, 永久に勝負がつかないこともありうる。そうしたゲームでは, (千日手を禁じるための追加ルールを設けない限りは) 負け型でも勝ち型でもない盤面が存在するのである。もちろん, 千日手が許されるゲームでは, 石の総数に相当する概念はない。

ただし, 有限型ゲームの基本定理は数学の定理としてそれなりに存在意義があるが, それをそのまま授業で扱うべきかどうかについては慎重に考えた方

[*2] この論法には不備がある。次のパラグラフを参照せよ。

[*3] あるいは, 上述の議論をそのまま生かすならば, (仮定 1) の下で, どのような手を打っても負け型に直せない盤面の中で石の個数が極小な盤面を取り, それについて議論すればよい。

がよい。

まず, 証明は数学的帰納法を知っていれば難しくないが, テクニカルであり, 数学的証明に慣れていないと難しい。数学的帰納法自体は知っていても, それをどう使うのかが分かるには数学的訓練を要する。また, 証明ですべての有限型ゲームを考えること自体が抽象的過ぎて, 捉えどころがないように感じられる。一方, 当面の石取りゲームについて言えば, それははっきりと論証できないまでも, 体験的に明らかであるように思われる。実際にゲームをプレイした体感的理解に重点を置くならば, なぜわざわざテクニカルな言葉遣いをもちいて抽象的な証明をしなければならないのかが納得しにくい。また, 授業時間が限られているという事情も考慮しなくてはならない。

以上のことから, 教員はゲームの数学的背景をきちんと理解していなければ授業はできないが, 授業の中で証明に言及することは最低限に抑えた方がよいであろう。生徒から質問や疑問が投げかけられたときは, その生徒の理解の深さに応じて, いつでもその生徒にとって一歩先の理解へと導くような働きかけができるように準備しておく必要がある。

教員は, 数学の理解にはいろいろなレベル, そしていろいろな様相があり, 記号論理的な理解だけが数学の理解のすべてではないことを理解しておく必要がある ([5] を参照)。石取りゲームの指導は, 教員の指導力がそのレベルに達するための, 教員にとってのよい演習問題でもある。

4.3　負け型を作る

前述の問題 1〜3 では, 与えられた盤面に必勝法が存在するという情報が問題中に与えられていたため, 心理的に取り組みやすかった。そして, 必勝法が存在することは, 負け型が作れることと同値であることが分かった。負け型は, すべての盤面の集合の中で稀であることも体得的に分かる。

以下では, 負け型の特徴付けを目標とする。与えられた盤面が負け型であるかどうかを判定する単純な数学的な基準を見つけることを目標とするのである。たとえば, 次のような問題を考えよう。

例題　(4, 4, ？) が「負け型」となるように,「？」マークのところに数を入れてください。

上の例題に対して, 答は明らかに「0」である。0 を入れれば, $(k, k, 0)$ タイプの負け型に嵌るからである。この例題はやさしいが, 同じような問題をいくつか解いてみよう。

問題 4　次の状態が「負け型」となるように,「？」のマークのところに数を入れてください。

(1)　(2, 1, ？)
(2)　(3, 1, ？)
(3)　(3, 2, ？)
(4)　(4, 1, ？)
(5)　(4, 2, ？)
(6)　(4, 3, ？)

この問題も作業量的には, 問題 1〜3 とほとんど変わらず, 全く直感が働かない場合は「？」に 0, 1, 2, . . . と順番に当て嵌めてみるしかない。しかし, このように問の形式を変えることによって, 負け型を特徴付けるという目的には近づいていることが後で分かる。

問題 1〜3 はゲームの 1 局面を取り出してきて,「次の一手」を問うという形であった。まずゲームを体験してみるという意味で, 導入としては適切であった。問題 4 はそれに比べると, 実戦場面とは切り離された抽象的な問題であるといえる。しかし, そのような段階を経なければ, 必勝法を理論的に構築することはできない。このことは, ただゲームに勝てるスキルを身につけるということを越えて, この教材が数学的思考あるいは数学的構造の構築とはどのような作業を伴うものなのかを体験的に理解させるという教育的目的に適っていることを示している。いわば, 「問題解決のためには迂回路を通ることが有効な場合がある」という体験である。

それ以外にも, この問題には数学的な意味がある。それは, 「存在と一意性」について学ぶ場面を提供しているということである。

4.4　存在と一意性

一般に, 数学で「存在と一意性」が取り沙汰される場合, 一意性の証明の方がやさしい場合が多い。

そこで, 初めに一意性について考えてみよう。

非負整数 a, b が与えられたとき, (a, b, x) が負け型となる x を求める問題を考える。もし, この問題の解が 2 つあったとすると, それを x_1, x_2 とした場合, (a, b, x_1), (a, b, x_2) がともに負け型であることになる。

ここで, $x_1 > x_2$ と仮定してもいいだろう。すると, (a, b, x_1) において一番右の山から $x_1 - x_2$ 個の石を取ることによって負け型 (a, b, x_2) が作れることになるので, (a, b, x_1) は負け型ではない。これは, (a, b, x_1) が負け型であると仮定したことに矛盾する。

よって, (a, b, x_1), (a, b, x_2) がともに負け型であることはあり得ないことが分かった。すなわち, 与えられた a, b に対して, (a, b, x) が負け型となるような x は存在すれば一意的である。

こうして, 第 1 と第 2 の山の石の個数を与えた時, 全体が負け型となるような第 3 の山の石の個数が, 存在すれば一意的であることが示された。また, 第 3 の山から取る手について考慮するだけでそのことが示されたことにも言及しておく価値がある。というのは, そのことから, さらに第 1, 第 2 の山から取るという手についても考慮することによって, このゲームについてもう少し別の何かが分かる—もしかすると, 負け型の存在性が分かる—可能性が示唆されるからである。そして, 実際にそうであることがこのあとすぐに分かるのである。

いま, (a, b, x) が負け型であるような x が存在するとし, それを $m(a, b)$ と書く。(a, b, x) が負け型であるとすると, すべての $0 \le a' < a$ に対して (a', b, x) は負け型ではない。同様に, (a, b, x) が負け型であるとすると, すべての $0 \le b' < b$ に対して (a, b', x) は負け型ではない。よって, すべての a, b に対して $m(a, b)$ が存在するとすると, $m(a, b)$ は $m(a', b)$, $m(a, b')$ のいずれとも異ならなければならない (ただし, $0 \le a' < a$, $0 \le b' < b$)。非負整数 x であって, $m(a', b)$, $m(a, b')$ ($0 \le a' < a$, $0 \le b' < b$) のいずれとも異なる最小のものを x_0 とすると, (a, b, x_0) から 1 手で得られる局面 (a', b, x_0), (a, b', x_0), (a, b, x') はいずれも負け型ではない (ただし, $0 \le x' < x_0$)。よって, (a, b, x_0) は負け型である。

以上より, $m(a, b)$ を $a + b$ に関して帰納的に定義する方法が分かった。0 以上の整数の全体 $\mathbb{N}_0$ から $\{m(a', b)\,;\, 0 \le a' < a\}$ と $\{m(a, b')\,;\, 0 \le b' < b\}$ を除いた補集合の最小要素を $m(a, b)$ とすればよい。

こうして, $m(a, b)$ の一意性に続いて存在性も証明された。

4.5　2 つの定義

ここまでの話で, 三山崩しの局面の負け型について, 2 通りの定義が現れた。

第 1 の定義はこの種のゲーム一般について言える概念的な定義である。すなわち, 順系のゲームに対しては,

(1) 最終局面は負け型である,

(2) 1 手で負け型に持ち込める局面は負け型ではない,

(3) どんな手を打っても負け型に持ち込めない局面は負け型である

と決めることによって負け型全体の集合を定義するのである。最終局面までの手数が有限であるゲームであれば, 最終局面から遡っていくことによって, 帰納的にすべての局面について (2) か (3) を適用することができる。最終局面を除いては, (2) と (3) が排反ですべての場合を尽くしているから, すべての盤面は負け型であるか, 負け型でないかのどちらかになり, 負け型でない盤面からは最良の手を繰り返しとっていくことで有限の手数で勝ちに持ち込める。

第 2 の定義は 4.4 節で述べたものである。すなわち, 非負整数の組 (a, b) が与えられた時, 集合 $M(a, b)$ を $M(a, b) = \{m(a', b)\,;\, 0 \le a' < a\} \cup \{m(a, b')\,;\, 0 \le b' < b\}$ によって定め,

$$m(a, b) = \mathrm{Min}(\mathbb{N}_0 \setminus M(a, b))$$

とおくというものである。この定義も帰納的であるとはいうものの, 三山崩しに特有であり, 負け型となる盤面をより具体的に特徴付けている。

このゲームを数学的に解明するとは, これら 2 つの定義が同値であることを示すことに他ならないことも自然に納得できるであろう。

4.6　どのようにして納得させるか

ここで述べてきた必勝法の議論, 特に負け型の存在と一意性は, 数学的議論に慣れていれば全く難しくないが, 例えば中学 1 年生や一般の社会人も混在する教室でどのようにして説明するかについては一考を要する。

机の上に碁石があって, 対面している相手とゲームをするという行為と環境の作用を通じて, 何となく「体で」理解してもらうようにするのがよいと思われる。そこで, ワークショップでは, 上記のような「課題」を与えるとともに, $m(a, b)$ を調べて記入するための表を用意した。その一部を表 1 に示した。

必勝法の観点からは, 三つの山の区別 (左, 真ん中, 右) には意味がないこと—山の順序だけを入れ替えた局面は必勝法の観点からは同値であること—を最初に注意してあったので, 記号 $m(a, b)$ を導入する際に, この記号を使うと, $m(a, b) = m(b, a)$ や $m(a, b) = c \Leftrightarrow m(a, c) = b$ が成り立つことにも注意した。これによって, 表への書き込みが少し楽になることを期待した。参加者は, 個人によって速さに差はあったものの, 表への書き込みも熱心に行っていた。

表 1　$m(a, b)$

$\oplus$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4		
2	2	3	0	1	6		4	
3	3	2	1	0				
4	4	5	6		0		2	
5	5	4				0		
6	6		4		2		0	
7	7							0

参加者は表に記入しながらいろいろなことを観察した。例えば, 表は右下がりの対角線に関して対称にある。これは上記の性質 $m(a, b) = m(b, a)$ から明らかなことである。また, この対角線上には 0 が並ぶが, それは $(k, k, 0)$ タイプの負け型の存在, すなわち, $m(k, k) = 0$ を反映している。また, 最上段, 最左列には 0 から始まる非負整数が自然な順序に並ぶ。これは, $m(0, k) = m(k, 0) = k$ を反映している。

表をどんどん埋めながら, 逆対角線, すなわち, 左下がりの 45° の方向に直線状に並ぶ数に着目すると数字 7 ばかりが並んでいる場所があることに気づく。また, ある親子は適当な大きさの正方形の部分に着目すると, そこに並んでいる数値が逆対角線に関してもある意味で対称性を有することに気づいていた。なお, 実際のワークショップでは, 表 1 の他に, 15×15 のサイズの空欄の表も配布した。

このようにして, 実際の人間を相手とする対戦, そして, 負け型を見つけ, 表に記入していく作業, 最後に表を見てパターンを発見する作業を通して, 理屈ではなく体感的に負け型の存在と一意性やそれを帰納的に定義する構成法, そして, 規則性を演算の性質としてまとめ直すことによる, 数学的見方のよさや視点を変えることの有用性を参加者は知らず知らずのうちに経験したのではないかと思われる。

4.7　2 項演算 $\oplus$

2 時間の時間内で 15×15 表をすべて完成したグループはなかったが, だいぶいろいろな法則を見つけて議論する姿が見られた。

まず, 法則

(1)　$m(a, b) = m(b, a)$,

(2)　$m(k, k) = 0$,

(3)　$m(0, k) = m(k, 0) = k$

からどのようなことが分かる—あるいは推察される—だろうか。

もし, $m(a, b)$ を 2 項演算と考えて $a \oplus b$ と書くことにすると, (1) からこの新しい演算 $\oplus$ は交換法則を満たすことが分かる。よって, この意味では, 演算 $\oplus$ は整数の加法や乗法に類似していると言える。

では, 演算 $\oplus$ は加法と乗法のうちどちらに「より近い」だろうか。(3) を見ると, 0 はこの演算の単位元としての性質を満たしていることが分かる。よって, 演算 $\oplus$ は加法により近いのではないかと思われる。また, 性質 (2) は「同じ数を演算 $\oplus$ すると 0 になる」と読むことができる。これは, 標準的な代数学において,「同じ数を 2 つ加えると 0 になる」という性質をもつ標数が 2 の体とよく似ている。実際, 後述するように, 演算 $\oplus$ は標数が 2 の素体である $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と関係していることが分かる。

5 種明かし—2 項演算 $\oplus$ と 2 進法

表の数値を追うと, 明らかになんらかの未知のパターンに支配されているように見えるが, それをひとことで言い当てることは難しい。

しかし, 3, 7, 15 が右上がりの対角線一列に並ぶことから, これらの数が 2^2-1, 2^3-1, 2^4-1 であることに気付けば, この新しい演算が 2 のべきに関係していることに気付く。

そこで, a や b が 2 のべき, すなわち, $1, 2, 4, 8, \ldots$ などの数であるときに $a \oplus b$ の結果がどうなるかをまず観察するという作業ができればよかったのだが, 時間的な制約もあり, そこまではできなかった。

演算 $\oplus$ の性質 (2) から一般に, 非負整数 x について,

(4) $-x = x$

という性質があることが分かる。そこで, (a, b, c) が負け型であるための条件

$a \oplus b = c$

において, 右辺の c を左辺に「移項」すると,「この世界では移行しても符号は変わらない」という性質から

$a \oplus b \oplus c = 0$

となる。これが (a, b, c) が負け型であるための条件であり, このように書いてみると, 確かに a, b, c の並べ替えに関して不変であることが納得できる。

この $a \oplus b \oplus c$ のように, 負け型を特徴付けるのに有効な量を, このゲームの不変量という。

不変量が 0 となるようにして相手に渡せば, 相手が何らかの手を打ってきたとき, 不変量は必ず変化するので, その値は 0 ではなくなっている。そこでまた, 自分は不変量が 0 となるように石を動かして相手に渡す。このことを繰り返せば, 石の総数は着実に減っていくので, いつかは自分の手順で石の個数を 0 にすることができて, 自分が勝つのである。

最後に, a, b から $a \oplus b$ を計算する方法を講師の方から簡単に紹介してワークショップを終了した。

2 のべきということから, a や b を 2 のべきの和で表わす—2 進数で表示する—ことに気付くと, 非常に明解になる。すなわち, $a \oplus b$ は計算機数学において a と b の「排他的論理和」と言われる演算を 2 進数表示において対応するそれぞれに桁において行ったものになっているのである。

例えば, $a = 7 = [111]$, $b = 5 = [101]$, としたとき, $a \oplus b = [111] \oplus [101] = [010] = 2$ となるので, (7, 5, 2) は負け型である (ここで, $[\ldots]$ は 2 進数表示を示す)。相手が 7, 5, 2 個の山のうちどれに手をつけても不変量は乱れて 0 より大きくなる。論理的に完結するためには, そのとき, 1 手で不変量を 0 に戻すことがどのような場合でもできることを証明しなければならないのだが, そのことには触れなかった。

6 反省

今回のワークショップでは, ゲームの実戦の中に身を置き, そのとき自分はどう行動するかを考えながら, 数学的に自然な概念を芽生えさせ, また数学的な法則性を観察によって学び取る感性を育てることに主眼を置いた。しかし, そこから論理の世界に入っていく入り口までの距離はごくわずかである。

最後の 2 進法を使った演算 $\oplus$ の明解な説明についても, 本当は, このことを観察に基づく仮説検証形式の授業で行うべきではないかという考えもあったのであるが, そのためには今回は時間数が足りず, また受講者側に多大な集中力を必要としただろう。2 進法と演算 $\oplus$ との関係は美しい結果ではあるが, 必ずしも全員がこのことを「自力で」発見する必要はないだろうと考えた。そこで, 2 進法による「種明

かし」は最後の 10 分間で急ぎ足で行うだけにした。

セミナーの終了後, 受講された方から主催担当者に「久しぶりに頭を使えて本当に良かった」「楽しかった」等の声が寄せられたとのことである。

また, 受講者のアンケートでは, ほぼ全員が「面白かった」と答えており, 「つまらなかった」と回答した者はいなかった。

今回の参加者 29 名のうち, 生徒は 8 名, 保護者が 21 名であった。このうち, 親子参加が 3 組あり, 微笑ましい姿が見られた。また, 父親の参加者は 6 名であった。

後日, 参加された方がそのご家族から, 「なぜ 2 進法の足し算では繰り上がりの必要がないのか」と質問されたとの話を伺った。伝聞なので質問の意図が正確に把握できているわけではないが, これは確かにもっともな質問であると同時に, 今回の話の全体の本質をついた愉快な質問でもあると思う。質問された方の誠実な人柄を感じるとともに, 直接参加された方以外にもこのような形で関心をもっていただけたことについて, 大いに感謝している。

参考文献

[1] 文部科学省「高等学校学習指導要領解説 (数学編・理数編)」実教出版 (1999/12)

[2] 一松信『石取りゲームの数理』森北出版, 1968, 2003(再版)

[3] C. L. Bouton, Nim, a game with a complete mathematical theory, Ann. of Math., (2) **3** (1902), pp. 35–39.

[4] 永持 仁 (京都大学情報学研究科), エヌシとダイユーのパズル研究室
`http://www-or.amp.i.kyoto-u.ac.jp/members/nag/puzzle/top_page.html`

[5] George Lakoff, Rafael E. Núñez, “Where Mathematics Comes from: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being”, Basic Books, Reprint version, 2001/8/7.

[6] PTA 行事委員会主催 2008 年度 麻の葉セミナー配布プリント (2008.9.13)